[redacted]

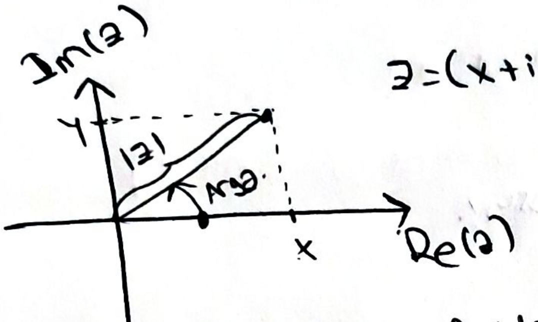
Διάλεξη 4η

14/03/2019

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Υπενθύμιση: Κάθε $z\in\mathbb{C}^*$ μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά σε πολική (ή τριγωνομετρική) μορφή
$z=|z|e^{i\mathrm{Arg}z}$, όπου $|z|>0$ είναι η απόλυτη τιμή και $\mathrm{Arg}z$ το κύριο όρισμα του z. με $\mathrm{Arg}z\in(-\pi,\pi]$

Γραφικά:



$z=(x+iy)$

(*) Το $\mathrm{Arg}z$ είναι μια προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του θετικού ημιάξονα των πραγματικών και του διανύσματος (x,y), αν $z=x+iy$ σε αλγεβρική μορφή.

Παρατήρηση: Το σύνολο $\arg z=\mathrm{Arg}z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ονομάζεται όρισμα του z και ισχύει $z=|z|e^{i\mathrm{Arg}z}=|z|e^{i\arg z}$

↑ λόγω της 2π-περιοδικότητας της $e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ y\in\mathbb{R}$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ!!!

Παρατήρηση: Για κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, υπάρχει μοναδικό κύριο όρισμα $\varphi=\mathrm{Arg}z\in(-\pi,\pi]$ έτσι ώστε $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=1 \iff$
$z=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, αφού $\forall\varphi,\psi\in\mathbb{R}:\ e^{i\varphi}=e^{i\psi}\overset{(1)}{\iff}e^{i(\varphi-\psi)}=1$
$\overset{(2)}{\iff}\cos(\varphi-\psi)=1\ \wedge\ \sin(\varphi-\psi)=0$
$\overset{(3)}{\iff}\varphi-\psi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

(*) 1: λόγω ιδιοτήτων της συνάρτ. $e^{iy}=\cos y+i\sin y$

2: λόγω του ορισμού της

3: ιδιότητα τριγων. συναρτήσεις.

Συνεπώς, αν $\phi,\psi \in (-\pi,\pi] \Rightarrow \phi-\psi \in (-2\pi,2\pi) \xRightarrow{\text{τότε}}$
$\phi-\psi = 2\kappa\pi \in (-2\pi,2\pi) \Rightarrow \phi-\psi=0$

Έτσι: $\boxed{e^{i\phi}=e^{i\psi} \text{ με } \phi,\psi\in(-\pi,\pi] \Longrightarrow \phi=\psi}$

Πόρισμα: $e^{i\theta}=1,\ \theta\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \theta=2\kappa\pi\in\mathbb{Z}$.

$e^{i\theta}=1,\ \theta\in(-\pi,\pi] \Leftrightarrow \theta=0 \quad (1=e^{i0})$

π.χ. (Βασικά κύρια ορίσματα)

α) $x\in\mathbb{R},\ x>0 \ (\Rightarrow \mathrm{Arg}\,x=0 \Rightarrow \arg x = 2\kappa\pi\in\mathbb{Z})$

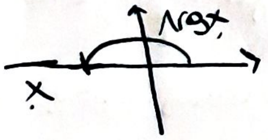
$x=|x|e^{i\arg x} \underset{x>0}{=} x e^{i\arg x}$

$\Rightarrow 1=e^{i\arg x}$ (γιατί $|x|=x$)

$\Rightarrow \arg x = 2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow \mathrm{Arg}\,z=0$

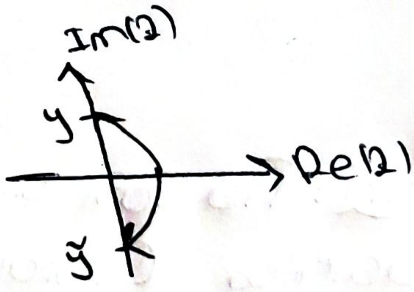
"το $\mathrm{Arg}\,z$ είναι το όρισμα που βρίσκεται στο $(-\pi,\pi]$"

β) $x\in\mathbb{R},\ x<0 \Rightarrow \mathrm{Arg}\,x=\pi. \Rightarrow \arg x = \pi+2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

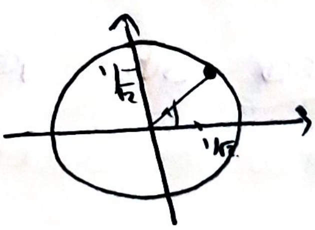


γ) $y>0:\ \mathrm{Arg}(iy)=\frac{\pi}{2}$

$\tilde{y}<0:\ \mathrm{Arg}(i\tilde{y})=-\frac{\pi}{2}$



δ) $1+i=\underbrace{|1+i|}_{=\sqrt{2}}e^{i\,\mathrm{Arg}(1+i)}$



$\Leftrightarrow e^{i\,\mathrm{Arg}(1+i)}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\Rightarrow \mathrm{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$

[redacted]

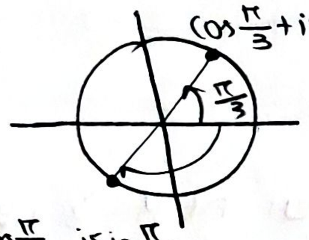
ε) $1-i = \underbrace{|1-i|}_{=\sqrt{2}} e^{i\operatorname{Arg}(1-i)} \Rightarrow e^{i\operatorname{Arg}(1-i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Arg}(1-i)}_{\in(-\pi,\pi]} = -\frac{\pi}{4}$

στ) $-1-i = |-1-i| e^{i\operatorname{Arg}(-1-i)} \Rightarrow e^{i\operatorname{Arg}(-1-i)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$

ζ) $-1-\sqrt{3}i = |-1-\sqrt{3}i| e^{i\operatorname{Arg}(-1-\sqrt{3}i)} \Rightarrow e^{i\operatorname{Arg}(-1-\sqrt{3}i)} = \left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{Arg}(-1-\sqrt{3}i) = -\frac{2\pi}{3}$

$\Longrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

η) $\pi + ei = \underbrace{|\pi+ei|}_{=\sqrt{\pi^2+e^2}} e^{i\operatorname{Arg}(\pi+ei)} \Rightarrow e^{i\operatorname{Arg}(\pi+ei)} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+e^2}} + i\frac{e}{\sqrt{\pi^2+e^2}}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \operatorname{Arg}(\pi+ei) = \arctan\frac{\pi}{e}$

(*) Εδώ χρησιμοποιούμε τον γενικό τύπο του αντίστροφου μετασχηματισμού από καρτεσιανές σε πολικές.

$\phi = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

θ) $(1-i)^{23} = \left(\underbrace{|1-i|}_{\sqrt{2}} e^{i\underbrace{\operatorname{Arg}(1-i)}_{=-\pi/4}}\right)^{23} = 2^{23/2} \underbrace{\left(e^{-i\pi/4}\right)^{23}}_{=e^{-i23\pi/4}}$

$\Rightarrow (1-i)^{23} = \underbrace{(\sqrt{2})^{23} e^{i\left(-\frac{23\pi}{4}\right)}}_{=|(1-i)^{23}| e^{i\arg((1-i)^{23})}}$, αφού $|e^{i\phi}| = 1, \phi \in \mathbb{R}$

Άρα $(1-i)^{23} = (\sqrt{2})^{23}\underbrace{e^{i\left(-\frac{23\pi}{4}\right)}}$

$$= e^{i\left(-\frac{23\pi}{4}+\frac{24\pi}{4}\right)}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2^{11}\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2^{11}(1+i)$$

(*) Καλοί ασκήσεις σε 23.

1.3: Ρίζες και λογάριθμοι.

1.3.1: Επίλυση της $z^n = w$ για $w \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

Για $w=0$: $z^n = w = 0 \iff \underbrace{|z^n|}_{=|z|^n} = |w| = 0 \iff |z| = 0$

(πολλαπλασιαστική απόλυτη τιμή) (ιδιότητες πραγματικών αριθμών)

$\iff z = 0$

ιδιότητες τοπολογικές του $\mathbb{R}^2$.

Για $w \neq 0$: τότε $w = \underbrace{|w|}_{=r} e^{i\underbrace{\arg w}_{=\theta}}$ και $z = \underbrace{|z|}_{\rho} e^{i\underbrace{\arg z}_{\phi}}$

όπου $|z| = \rho > 0$ (βλέπε ισοδυναμία πιο πάνω)

Συνεπώς για $w \neq 0$: $z^n = w \iff (\rho e^{i\phi})^n = re^{i\theta}$

$\iff \rho^n e^{i\phi n} = re^{i\theta} \Rightarrow \rho^n = r$ και $n\phi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\iff \rho = \sqrt[n]{r}$ και $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Αντίστροφα, οι μιγ. αρ. που φαίνονται στην σχέση n, δηλαδή

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

επαληθεύουν την $z^n = w = re^{i\theta}$ και σε όλα τα άλλα προκύπτουν οι ίδιοι αριθμοί.

$\Longrightarrow$ Αυτές είναι όλες οι ρίζες της $z^n = w$, οι οποίες είναι μεταξύ τους διαφορετικές, αφού για $k, l \in \{0,\dots,n-1\}$

$$z_k = z_l \Leftrightarrow e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta+2l\pi}{n}} \Leftrightarrow e^{i\frac{2(k-l)\pi}{n}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(k-l)\pi}{n} = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow k-l = n\cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow |k-l| = n|m|, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

αφού $k-l \leq k \leq n-l$ και $l-k \leq l \leq n-1 \Rightarrow |k-l| \leq n-1$.

$$\Rightarrow |k-l| = n|m| \leq n-1, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=0 \Rightarrow \underline{k=l}.$$

SOS!

Συμπέρασμα: Άρα η $z^n = w\,(\neq 0)$ έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες τις

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w + 2k\pi}{n}}, \quad k=0,\dots,n-1}$$

Ειδικότερα για $w=1$: έχουμε ως λύσεις $\zeta^n = 1$ τις n-οστές ρίζες της μονάδας:

$$\boxed{\zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k=0,\dots,n-1}$$